Examples of Tasks from ©2008 Course 1, Unit 4

Getting Started

The tasks below are selected with the intent of presenting key ideas and skills. **Not every answer is complete**, so that teachers can still assign these questions and expect students to finish the tasks. If you are working with your student on homework, please use these solutions with the intention of increasing student understanding and independence. A list of questions to use as you work together, prepared in English and Spanish, is available. Encourage students to refer to their class notes and Math Toolkit entries for assistance.

As you read these selected homework tasks and solutions, you will notice that some very sophisticated communication skills are expected. Students develop these over time. This is the standard for which to strive. See Research on Communication.

The Discrete Mathematics page or the Scope and Sequence (2nd edition) might help you follow the conceptual development of the ideas you see in these examples.

Main Mathematical Goals for Unit 4

Upon completion of this unit, students should be able to:

- understand and apply Euler paths and vertex coloring (comprender y aplicar caminos de Euler y los colores de los vértices).
- use vertex-edge graphs to represent and solve problems related to paths, networks, and relationships among a finite number of objects (usar gráficos de los bordes de vértices para representar y resolver problemas relacionados con caminos, redes, y las relaciones entre un número finito de objetos).
- model mathematically by building and using vertex-edge graph models to solve problems in a variety of settings (modelar matemáticamente por la creación y utilización de modelos de gráficos de los bordes de vertices para resolver problemas en una variedad de posiciones).
- use algorithmic problem solving in designing, using, and analyzing systematic procedures for solving problems (usar problemas algoritmos para resolver problemas en el diseño, uso, y el análisis de los procedimientos sistemáticos para solucionar problemas).
- use mathematical reasoning to explore and reason about properties of vertex-edge graphs (usar razonamiento matemático para explorar y razonar sobre las propiedades de los gráficos de los bordes de vértices).

What Solutions are Available?

Lesson 1: Investigation 1—Applications Task 1 (p. 250), Connections Task 10 (p. 255)
Investigation 2—Applications Task 4 (p. 252), Applications Task 5 (p. 252), Extensions Task 21 (p. 259)
Investigation 3—Applications Task 7 (p. 254), Reflections Task 20 (p. 258), Extensions Task 28 (p. 262)

Lesson 2: Investigation 1—Connections Task 5 (p. 278)
Investigation 2—Applications Task 1 (p. 276)

Selected Homework Tasks and Expected Solutions

(These solutions are for tasks in the 2nd edition book—2008 copyright.
For homework tasks in books with earlier copyright dates, see Helping with Homework.)

Lesson 1, Investigation 1, Applications Task 1 (p. 250)

To find the optimal path, students should start at the equipment room *G*, so they do not have to move the equipment without spraying. They should also proceed in such a way that they do not retrace their steps. There are many possible solutions. Here is one optimal path: *G* to *H*, *H* to *F*, *F* to *E*, *E* to *F*, *F* to *C*, *C* to *D*, *D* to *C*, *C* to *B*, *B* to *A*, *A* to *D*, *D* to *E*, *E* to *G*. (Para encontrar la ruta óptima, los estudiantes deben comenzar en la sala de equipos G, para no tener que mover el equipo sin la fumigación. También deben proceder de tal manera que no vuelven sobre sus pasos. Hay muchas soluciones posibles. Aquí hay un camino óptimo: G a H, H a F, F a E, E a F, F para C, C y D, D a C, C a B, B a A, la A a la D, D a E, E a G.)

The second path is to be completed by the student. (El segundo camino es para ser completado por el estudante.)

Lesson 1, Investigation 1, Connections Task 10 (p. 255)

a. If you count the exterior as one of the regions, this is what the table will look like for Graph I and III. (Si usted cuenta el exterior como una de las regiones, esto es lo que el cuadro se verá para los Gráficos I y III.)

Graph	Number of Vertices (V)	Number of Regions (R)	Number of Edges (E)
I	4	4	6
II			
III	6	8	12
IV			

b–d. Using the examples above, students should fill in the rest of the table and then look for a pattern to find a rule for Part b and then apply their rule to Parts c and d to check if it is correct. (Usando los ejemplos anteriores, los estudiantes deben llenar el resto de la tabla y, a continuación, buscar un patrón para encontrar una regla para la Parte b y luego, aplicar su regla a las Partes c y d para comprobar si es correcta.)

Lesson 1, Investigation 2, Applications Task 4 (p. 252)

a. To be completed by the student. (Para ser completado por el estudiante.)

b. Graphs iii and iv have Euler circuits. (The test for an Euler circuit is that each vertex in these graphs has an *even degree*, that is, has an even number of edges terminating at each vertex. If all the vertices do not have an even degree, then there is not an Euler circuit.) To find an Euler circuit, students start anywhere. In practice, students find groups of vertices that form a circuit, within the entire graph, and then link these circuits together. A possible circuit for Graph iii is *A-B-C-D-E-F-G-H-K-L-M-N-B-C-E-F-H-K-M-N-A*. There are other circuits that will work. (Gráficos iii y iv tienen los circuitos de Euler. (La prueba para un circuito de Euler es que cada vértice en estos gráficos, tiene un grado par, es decir, tener un número par de bordes que terminan en cada vértice. Si todos los vértices no tienen un grado para, no haya un circuito de Euler.) Para encontrar un circuito de Euler, los estudiantes empiezan en cualquier lugar. En la práctica, los estudiantes encuentran grupos de vértices que forman un circuito, dentro del gráfico total y, a continuación, vincular estos circuitos juntos. Un circuito posible para el Gráfico iii es *A-B-C-D-E-F-G-H-K-L-M-N-B-C-E-F-H-K-M-N-A*. Hay otros circuitos que funcionan también.)

c. To be completed by the student.

d. To be completed by the student.

Lesson 1, Investigation 2, Extensions Task 21 (p. 259)

a.

Graph	Sum of the Degrees of All Vertices	Number of Vertices of Odd Degree
I	30	0
II	18	2
III		
IV		

The remainder of the table is to be completed by the student. (El resto de la tabla será completado por el estudiante.)

b. The sum of the degrees and the number of odd vertices are both even numbers. (La suma de los grados y el número de vértices impares son dos números pares.)

c. To be completed by the student.

Students can use the vertex-edge graph software in *CPMP-Tools* to generate more graphs, collect more data, and check their conjectures from Part b. (Los estudiantes pueden usar el software *CPMP-Tools* de gráficos de los bordes de vértices para generar más gráficos, recoger más datos, y comprobar sus conjeturas de la Parte b.)

d. Every edge adds 2 to the sum of degrees. Thus, an easy way to obtain the sum of degrees is to count the edges and double that number. This will yield an even number. (Cada borde añade 2 a la suma de los grados. Por lo tanto, una manera fácil de obtener la suma de los grados es contar los bordes y doblar ese número. Esto dará un número par.)

e. For every graph, the sum of degrees is even (see Part d). The number of odd-degree vertices must be even; otherwise the sum of degrees would not be even. (Note that *odd* + *even* = *odd*, *odd* + *odd* = *even*, and *even* + *even* = *even*.) (Para cada gráfico, la suma de los grados es par (ver la Parte d). El número de vértices de grados impares tienen que ser pares, de otra manera la suma de los grados no sería par. (Tome en cuenta que "*impar* + *par* = *impar*", "*impar* + *impar* = *par*," y "*par* + *par* = *par*."))

The kind of reasoning used in this explanation is called proof by contradiction. Students do not have to know the terminology, but they should be building up their repertoire of ways to prove. (El tipo de razonamiento utilizado en esta explicación se llama la prueba por contradicción. Los estudiantes no tienen que conocer la terminología, sino que deben estar construyendo su repertorio de formas de probar.)

Lesson 1, Investigation 3, Applications Task 7 (p. 254)

a. The paths on the map will work as edges, so the graph could look exactly like the map, except the detail is not necessary. But the graph edges do not have to be in exactly the same places, nor the same lengths as the paths. All that is necessary for the graph model is that the edges meet at vertices just as the paths intersect at points. (Los caminos en el mapa funcionarán como bordes, por lo que el gráfico puede ver exactamente como el mapa, salvo el detalle no es necesario. Pero, los bordes del gráfico no tienen que ser exactamente en los mismos lugares, ni la misma longitud que los caminos. Todo lo que sea necesario para el modelo del gráfico es que los bordes se reúnen en los vértices justo que los caminos se entrecruzan en puntos.)

b. Using the first letter of each rest area name for the vertex name, we get the following matrix. (Utilizando la primera letra de cada nombre de lugar de descanso para el nombre del vértice, obtenemos la siguiente matriz.)

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

The remainder of the matrix is to be completed by the student. (El resto de la matriz será completado por el estudiante.)

c. To answer this question, look at the row sums of the matrix. If any of the row sums are odd, then we know that there is not an Euler circuit because the row sum is the degree of the vertex. If the row sum is odd, so is the degree. (Para responder a esta pregunta, mire las sumas de las filas del matriz. Si la suma de cualquier fila es impar, entonces sabemos que no hay un circuito de Euler, porque la suma del la fila es el grado del vértice. Si la suma de la fila es impar, el grado es impar también.)

d. To be completed by the student. (Para ser completado por el estudiante.)

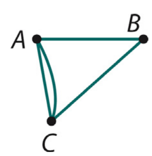
There are several ways to make every vertex even. Ask your student for two ways. (Hay varias maneras de hacer cada vértice par. Pregúntele a su estudiante para dos maneras.)

Lesson 1, Investigation 3, Reflections Task 20 (p. 258)

a. See below for graphs that correspond to matrices in parts i and ii. The matrix in part iii cannot be the adjacency matrix of a graph. A "2" in the second row, third column, and a "1" in the third row, second column, both indicate the number of edges joining vertices B and C. These numbers must be equal in an adjacency matrix. (Véase más abajo para los gráficos que corresponden a las matrices en las partes i y ii. La matriz en la parte iii no puede ser la matriz de adyacencia de un gráfico. Un "2" en la segunda fila, tercera columna, y un "1" en la tercera fila, segunda columna, indican que el número de bordes que unen vértices B y C. Estos números deben ser iguales en una matriz de adyacencia.)

i.

ii.



b. To be completed by the student. (Para ser completado por el estudiante.)

Lesson 1, Investigation 3, Extensions Task 28 (p. 262)

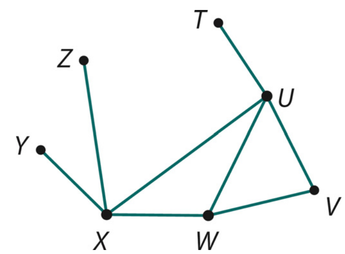
a. The degree of the vertex (El grado de la vértice) is 3.

b. The row sum of the first row is 2, but the degree of vertex *A* is 3. Therefore, the connection does not hold. (La suma fila de la primera fila es 2, pero el grado de vértice *A* es 3. Por lo tanto, la conexión no se sostiene.)

Lesson 2, Investigation 1, Connections Task 5 (p. 278)

a. Yes, because the relationship between vertices and edges is the same as in their previous model. (Even though the vertices are in different positions, the edges are still connecting the same vertices, which means mathematically it did not change.) Another answer could be that the radio stations connected with an edge are still 500 miles or less apart. (Sí, porque la relación entre vértices y bordes es el mismo que en su modelo anterior. (A pesar de lo que los vértices se encuentran en distintas posiciones, los bordes con conexión siguen siendo los mismos vértices, lo que significa matemáticamente que no han cambiado.) Otra respuesta podría ser que las estaciones de radio conectado con un borde siguen siendo 500 millas o menos de separación.)

b. Yes. One possible redrawing is shown below. (Sí. Se muestra un posible nuevo dibujo abajo.)



c. Graphs I and II are planar. (Graph I can be redrawn so no edges intersect.) (Los Gráficos I y II son planas. (Se puede dibujar Gráfico I de nuevo por que no se cruzan los bordes.))

Lesson 2, Investigation 2, Applications Task 1 (p. 276)

In this task, students use the method of graph coloring to solve the problem. "Coloring a vertex" does not literally mean that color has to be applied. It just means that there must be some code to keep track of the number of "colors" needed. Students could make one vertex a triangle and another a circle to indicate that they are in conflict. Or they can write "1" beside a vertex and "2" beside another. The point is that two vertices which are joined by an edge are in conflict and have to be coded differently. Since color plays a real part in this problem students may lose track of what coloring a vertex means. (En esta tarea, los estudiantes utilizan el método gráfico de colorear para resolver el problema. "Colorear un vértice" no significa literalmente que color tiene que ser aplicado. Significa simplemente que debe existir algún código para ver cuántos "colores" son necesarios. Los estudiantes podrían hacer un vértice en forma de triángulo y otro un círculo para indicar que están en conflicto. O pueden escribir "1" al lado de un vértice y "2" al lado de otro. El punto es que dos vértices que se unen por un borde se encuentran en conflicto y tienen que ser codificado diferente. Puesto que el color juega una parte real en este problema los estudiantes pueden perder lo que significa colorear un vértice.)

a. *rR* = red roses, *cR* = coral roses, *wR* = white roses, *yT* = yellow tulips, *pT* = purple tulips, *rT* = red tulips, *yM* = yellow marigolds, *oM* = orange marigolds

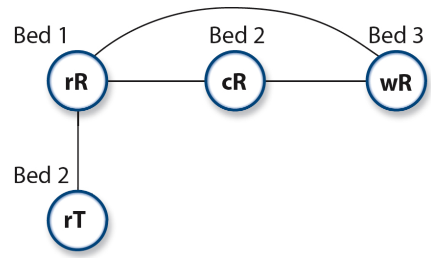
b. The first thing a student must do when trying to use a graph model is to decide what the vertices will represent and what the edges will mean. In conflict problems like this one, an edge means that the two vertices connected by the edge are in conflict in some way. In this problem, some types of flowers can't be planted together (they are in conflict). (Lo primero que un estudiante debe hacer cuando tratando de utilizar un modelo gráfico es decidir lo que los vértices representan y que los bordes significan. En problemas de conflicto como éste, un borde significa que los dos vértices conectados por el borde están en conflicto de alguna manera. En este problema, algunos tipos de flores no pueden estar plantados juntos (están en conflicto).)

   i. Vertices should represent the 8 flower types (color/variety). (Vértices deben representar los 8 tipos de flores (color/variedad).)

ii. The edges should represent when flower types are of the same variety or color so that edges represent conflicting flower types. (Los bordes deben representar cuando los tipos de flores son de la misma variedad o color, para que los bordes representan los tipos de flores en conflicto.)

iii. The "colors" of the graph should represent the different flower beds needed. (Los "colores" del gráfico deben representar los diferentes macizos de flores necesarios.)

c. Here is the *start* of a graph that will work. You can see that the roses have to be placed in three different beds, coded here as Bed 1, Bed 2, and Bed 3. The red tulips can not be placed with the red roses, so this conflict is indicated by an edge, and the red tulips could be placed in either Bed 3 or Bed 2. They have been added to Bed 2 in this graph model. As each new vertex is added students must decide where the conflicts are and then color the vertex accordingly.



(Aquí está el inicio de un gráfico que funcione. Usted puede ver que las rosas tienen que estar colocadas en tres diferentes macizos, codificado como Macizo 1, Macizo 2, y Macizo 3. Los tulipanes rojos no pueden estar colocados con las rosas rojas, se indica este conflicto mediante un borde, y los tulipanes rojos podrían estar colocados en cualquier de los Macizos 2 o 3. Ellos se han añadido al Macizo 2 en este modelo gráfico. Cuando añadiendo cada nuevo vértice los estudiantes deben decidir en dónde se ecuentren los conflictos y después añadir el color correcto.)

d. Three beds are needed.

e. There are lots of solutions. The combinations given in this answer should go with the graph and the coloring that the student provided in Part c. (Hay un montón de soluciones. Las combinaciones dados en esta respuesta deben ir con la gráfica y el colorido que el estudiante dió en la Parte c.)

f. The conflict was having the same color or the same variety in a single bed. (El conflicto estuvo teniendo el mismo color o la misma variedad en un macizo suelto.)

